

基于 TOPSIS 综合方法的汽车选购决策

刘红¹, 钱余欣²

(1.重庆电子工程职业学院, 重庆 401331; 2.中铁十一局集团第五工程有限公司, 重庆 400037)

摘要:汽车选购是一个复杂的、模糊的决策性问题, 选购的时候我们应该从价格、性能、款式等多方面进行综合评价分析。文章采用了 TOPSIS 综合方法进行多属性决策, 并与加权综合法对比分析, 结果表明, 在不同的选购目标前提下, 该方法能够更客观、合理地为汽车选购决策提供科学依据。

关键词:多属性决策; 加权综合法; TOPSIS 综合法

中图分类号: F224

文献标志码: A

文章编号: 2095-2945(2020)09-0119-02

Abstract: Car purchase is a complex and fuzzy decision-making problem. when choosing and purchasing, we should make a comprehensive evaluation and analysis from the aspects of price, performance, style and so on. In this paper, the TOPSIS synthesis method is used for multi-attribute decision-making, and compared with the weighted synthesis method. The results show that under the premise of different purchase objectives, this method can provide a more objective and reasonable scientific basis for automobile purchase decision-making.

Keywords: multi-attribute decision making; weighted synthesis method; TOPSIS synthesis method

由于人民生活质量的提高, 如何选购自己满意的汽车成为生活的常见问题。由于经济情况、生活习惯、兴趣追求等方面的差别, 选择汽车的标准不近相同, 人们常常会考虑经济适用、性能良好、款式新颖 3 个因素, 根据每种汽车在每个因素中的优劣程度做综合评价, 从而为选购哪种汽车做出决策。本文以 TOPSIS 综合法进行汽车选购决策研究, 并与加权综合法进行比较分析。

1 决策矩阵及其标准化

现有三种型号汽车可供选购, 记作 A_1, A_2, A_3 , 将价格、性能、款式 3 个属性记作 X_1, X_2, X_3 。对于价格 X_1 (单位: 万元), 3 种汽车分别为 24, 18, 15; 对于性能 X_2 , 采用打分法 (满分 10 分), 3 种汽车分别为 9, 7, 5; 对于款式 X_3 , 类似地打分为 9, 8, 7。得到决策矩阵

$$D = \begin{bmatrix} 24 & 9 & 9 \\ 18 & 7 & 8 \\ 15 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

用取倒数的方法可将决策矩阵中的属性值都转化为效益型, 记为

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & 9 & 9 \\ \frac{1}{18} & 7 & 8 \\ \frac{1}{15} & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

决策矩阵标准化是对 $D = (d_{ij})_{m \times n}$ 做比例尺度变换, 决策矩阵标准化有以下几种形式:

$$r_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sum_{i=1}^m d_{ij}} \quad (1)$$

R 的列向量的分量之和为 1, 称归一化;

$$r_{ij} = \frac{d_{ij}}{\max_{i=1,2,\dots,m} d_{ij}} \quad (2)$$

R 的列向量的分量最大值为 1, 称最大化;

$$r_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m d_{ij}^2}} \quad (3)$$

R 的列向量的模为 1, 称为模一化;

汽车选购的决策矩阵 D 经过 (1), (2), (3) 式标准化后

为

$$R = \begin{bmatrix} 0.2542 & 0.4286 & 0.375 \\ 0.3390 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.4068 & 0.2381 & 0.2917 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.625 & 1 & 1 \\ 0.8333 & 0.7778 & 0.8889 \\ 1 & 0.5556 & 0.7778 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.4496 & 0.7229 & 0.6466 \\ 0.3331 & 0.5623 & 0.5747 \\ 0.4796 & 0.4016 & 0.5029 \end{bmatrix}$$

2 属性权重的确定

把属性 X_1, X_2, \dots, X_n 的权重记为 w_1, w_2, \dots, w_n , 按照归一化得到的决策矩阵 R 的各个列向量 $(r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj})^T (j=1, 2, \dots, n)$, 利用信息熵法求得各方案关于属性 X_j 的熵为

$$E_j = -k \sum_{i=1}^m r_{ij} \ln r_{ij}, k = 1/\ln m, j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

根据熵, 计算区分度 F_j

$$F_j = 1 - E_j, 0 \leq F_j \leq 1 \quad (5)$$

进一步, 将归一化的区分度取作属性 X_j 的权重 w_j , 即

$$w_j = \frac{F_j}{\sum_{j=1}^n F_j}, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

对于汽车选购, 表 1 给出归一化的决策矩阵 R (即表中的 r_{ij}) 按照 (4)~(6) 式计算的熵、区分度和权重。

表 1 汽车采购中决策矩阵的熵、区分度和权重

	X_1	X_2	X_3
	0.2542	0.4286	0.375
r_{ij}	0.3390	0.3333	0.3333
	0.4068	0.2381	0.29917
E_j	0.9838	0.9749	0.9895
F_j	0.0162	0.0251	0.0105
w_j	0.3127	0.4846	0.2027

将各属性的权重按照大小排序为 w_2, w_1, w_3 。如果通过测量或调查得到决策矩阵, 那么信息熵法客观性较强。

3 综合方法对比分析

得到决策矩阵及属性权重后, 按照决策者的需要选择最优方案, 即方案对目标的(综合)权重。下面是几种主要的方法。

3.1 加权和法

已知标准决策阵 $R=(r_{ij})_{m \times n}$ 及属性权重 $w=(w_1, w_2, \dots,$

$w_n)^T$, 满足 $\sum_{j=1}^n w_j=1$, 方案 A_i 对目标的权重 v_i 是 r_{ij} 对 w_j 的加权和, 即

$$v_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} w_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

若记向量 $v=(v_1, v_2, \dots, v_m)^T$, 则(7)可写作矩阵式

$$v=Rw \quad (8)$$

3.2 加权积法

将加权和(算数平均)改为加权积(几何平均), 与(7)式相对应的公式为

$$v_i = \prod_{j=1}^n d_{ij}^{w_j}, i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

3.3 TOPSIS 方法

(1) 将决策矩阵模一化后的 r_{ij} 乘属性权重 w_j , 得 $v_{ij}=r_{ij} \cdot w_j$, 构成矩阵

$$V = (v_{ij}) = \begin{bmatrix} 0.1406 & 0.3503 & 0.1312 \\ 0.1042 & 0.2725 & 0.1165 \\ 0.15 & 0.1946 & 0.102 \end{bmatrix}$$

(2) 正理想解(记作 v^+) 和负理想解(记作 v^-) 分别由 V

每一列向量的最大元素和最小元素构成, 有 $v^+=(0.15 \ 0.3503 \ 0.1312)$, $v^-=(0.1042 \ 0.1946 \ 0.102)$ 。

(3) 方案 A_i 与正理想解的(欧式)距离按照

$$s_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (v_{ij} - v_j^+)^2}$$

计算(其中 v_j^+ 为 v^+ 的第 j 分量), 得 $S^+=(S_1^+ \ S_2^+ \ S_3^+)$

$$=(0.044 \ 0.09 \ 0.1556); A_i$$

与负理想解的距离按照 s_i^-

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^3 (v_{ij} - v_j^-)^2}$$

计算(其中 v_j^- 为 v^- 的第 j 分量), 得 $S^-=(S_1^- \ S_2^- \ S_3^-)$

$$=(0.1625 \ 0.2504 \ 0.0458)。$$

(4) 求方案 A_i 与正理想解的相对接近度为 $c_i^+ = \frac{s_i^-}{s_i^+ + s_i^-}$,

计算得 $C^+=(c_1^+ \ c_2^+ \ c_3^+)=(0.78 \ 0.73 \ 0.227)$, 归一化后的结果见表 2 的第 5 列。

表 2 汽车采购问题用 3 种综合方法的计算结果

方案	方法			
	加权和 (R 归一化)	加权和 (R 最大化)	加权积	TOPSIS
A_1	0.3632	0.3680	0.3570	0.78
A_2	0.3351	0.3367	0.3269	0.73
A_3	0.3017	0.3001	0.3007	0.227

由表 2 可知, 加权和法与加权积法得到的结果差别很小, TOPSIS 方法的结果差别稍大, 但用 3 种方法对应排序均为 A_1, A_2, A_3 。

4 结束语

在汽车选购过程中, 如果选购者的目标是综合指标最优、最理想, 且不受其他型号汽车属性变化影响, 确定属性值时应采取最大化的方法更好; 如果选购者的目标是周围最突出的, 并且接受变化对选择结果影响, 那么采取归一化方法更好, 3 种方法对比分析可知 TOPSIS 方法更能精确地反映各评价方案之间的差距, 可以给选购者提供更客观、更合理的选购方案。

参考文献:

[1]李华, 胡奇英. 预测与决策教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2012.
 [2]姜启源. 多属性决策应用中几种主要方法的比较[J]. 数学建模及其应用, 2012, 1(3): 16-28.
 [3]陈珽. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
 [4]姜启源. 多属性决策应用中的若干问题[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(23): 156-168.
 [5]姜启源, 谢金星, 等. 大学数学实验(2版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.
 [6]姜启源, 谢金星. 实用数学建模(提高篇)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.